ACTES DE LA VIII TROBADA D'HISTÒRIA DE LA CIÈNCIA I DE LA TÈCNICA
(BARCELONA, SCHCT, 2006), 419-422

ANTECEDENTS GEOMÈTRICS DEL TEOREMA DELS EIXOS PARAL·LELS DE LA MECÀNICA CLÀSSICA

Eduard Recasens Gallart
Departament de Matemàtica Aplicada III. UPC.

Paraules clau: *teorema de Steiner, moment d'inèrcia, geometria baricèntrica*.

Some geometrical antecedents of the parallel axis theorem.

Summary: *In order to calculate the moment of inertia of a solid body with regard to a fixed axis, it is very useful to take into account the formula which relates such moment with the moment around a parallel axis that goes through the centre of mass of the body.*

Books on Mechanics usually call this relation Steiner's Formula. Steiner, who lived in the 19th century, discovered this formula in a geometrical context. Euler, in his studies on Mechanics of solid bodies, had used the relation one hundred years before Steiner. In the 17th century, Fermat and Saragossà had also separately discovered the same relation when they wanted to prove a geometrical locus proposed by Apollonius in the 3rd century BC. This paper deals with these geometrical antecedents of the so-called Steiner's Formula.

Key words: *Steiner's theorem, moment of inertia, baricentric geometry.*

Els manuals de física, en el capítol dedicat a l'estudi del moviment del sòlid rígid, introdueixen el concepte *moment d'inèrcia* i demostren una fórmula que és de gran utilitat per a poder calcular el moment d'inèrcia I_X d'un sòlid rígid de massa M respecte d'un eix arbitrari X:

$$I_X = I_G + Md^2 \quad (1)$$

On G és l'eix que passa pel centre de masses del sòlid i és paral·lel a l'eix X. I_G és el moment d'inèrcia del sòlid respecte de l'eix G i d és la distància entre els dos eixos.

La gran majoria dels manuals de física anomenen *fórmula de Steiner* aquesta relació, però en cap dels manuals que he consultat hi posa el nom de pila. L'Steiner que jo conec és Jacob Steiner, un matemàtic suïs del segle XIX, l'obra matemàtica del qual és essencialment de geometria. J. Steiner coneixia bé la mecànica i al capítol 12 del segon volum de la seva obra completa es troba desenvolupada una teoria geomètrica del centre de gravetat on les masses en cada punt vénen representades per un coeficient numèric associat al punt, i, en aquest context, és on apareix la fórmula algebraica

$$\sum \alpha a^2 = \sum \alpha a_1^2 + s^2 \sum \alpha \quad (2)$$

escrita tal com apareix a l'obra de Steiner i que, convenientment interpretada, és equivalent a la fórmula (1). La interpretació consisteix a pensar que tenim uns certs punts i un particular punt que anomeno *P*. Si *G* és el punt que, segons la definició de Steiner, és el centre de gravetat geomètric dels punts donats amb els coeficients numèrics associats, *a* representa genèricament la distància de cada punt al punt *P* i *s* és la distància entre el punt *P* i el punt *G*, llavors, la suma dels quadrats de les distàncies *a*, respectivament multiplicades pel coeficient numèric associat a cada punt, és igual a la suma dels quadrats de les distàncies de cada un dels punts donats al punt *G* multiplicades pel coeficient numèric associat més el producte del quadrat de la distància *s* entre *P* i *G* per la suma de tots els coeficients numèrics associats als punts donats. Cal tenir en compte que les *a* són diferents per a cada punt i els coeficients α poden ser o no ser iguals en cada punt.

No deixa de ser curiós que la fórmula (1), que té ple significat dins la mecànica del sòlid rígid, s'atribueixi a Steiner que la va formular en els termes de l'expressió (2) en un context de significació totalment geomètric, mentre que Leonhard Euler, uns cent anys abans, ja l'havia introduït en el seu llibre de mecànica del sòlid rígid *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum* (1760), precisament segons la formulació (1) i li donà la significació que avui dia té en els manuals de física. Transcric les pròpies paraules d'Euler tal com figuren en el corol·lari 3 del problema 25 del capítol V que porta per títol «De momento inertiae»:

> Si igitur detur momentum inertiae Mkk respectu cujuspiam axis per centrum inertiae corporis transeuntis, momentum inertiae respectu alius cujusvis axis illi paralleli superat illud producto ex massa in quadratum distantiae hujus axis a centro inertiae.

Ara bé, la fórmula (1) en la seva formulació geomètrica (2) ja apareix al segle XVII. Pierre de Fermat la utilitza en la seva obra de recuperació del llegat grec i Josep Saragossà, matemàtic nascut a Alcalà de Xivert (Castelló de la Plana) i que per un temps residí a Mallorca, la introdueix per via geomètrica i amb tota generalitat a la seva obra *Geometria magna in minimis.*

El que és d'allò més interessant és que, en ambdós autors, Fermat i Saragossà, i de manera independent, la fórmula (2) aparegui quan es proposaren demostrar un mateix lloc geomètric que havia estat enunciat per Apol·loni de Perga cap al 250 aC. En Fermat sorgeix la fórmula (2) d'una manera força algebraica dins el mateix procés de resolució del lloc geomètric esmentat i, una vegada ha resolt el problema, ja no la fa servir més. El cas de Saragossà és ben diferent. Per J. Saragossà, la fórmula (2) és l'eix vertebrador de tot un sistema geomètric que acaba resultant una primera formulació d'allò que, en el segle XIX, el matemàtic Ferdinand Möbius anomenarà *geometria baricèntrica*. El fet que Saragossà treballi estrictament dins el marc de la geometria pura euclidiana fa que a la *Geometria magna in minimis* la fórmula (2) aparegui sota una formulació en termes d'àrees de polígons, la qual, en definitiva, és més fidel a l'enunciat d'Apol·loni.

El llibre on figura l'enunciat del lloc geomètric d'Apol·loni en qüestió és perdut i també ho era en el segle XVII. Tant P. Fermat com J. Saragossà llegiren aquest enunciat a *Pappi alexandrini mathematicae collectiones* (Pisa, 1588), que és una traducció del grec al llatí realitzada per Federigo Commandino de l'obra de Pappos d'Alexandria (300 dC) *Synagogé*. En aquesta obra, que consta de vuit llibres, el matemàtic alexandrí glossa tota una sèrie de resultats dels geòmetres grecs de l'època clàssica; en particular, dins el llibre 7 es troba l'enunciat del lloc geomètric d'Apol·loni que motivà a Fermat i Saragossà la introducció de la fórmula (2).

En el segle III aC, Apol·loni de Perga escriví un tractat de geometria intitulat *Plane loci* en el qual hi havia citats i demostrats més d'un centenar de llocs geomètrics, la solució dels quals era sempre o bé una recta o bé una circumferència o parts d'aquestes i per això aquests llocs geomètrics foren anomenats pels grecs *llocs plans*, en el sentit que per a construir-los no calia emprar mètodes estereomètrics.

Els *Plane loci* estaven formats per dos llibres i Pappos fou molt breu a l'hora de parlar-nos-en, es limità a elaborar vuit enunciats com a síntesi del llibre I i uns altres vuit enunciats per al llibre II. És a l'enunciat cinquè del resum que fa Pappos del llibre II on trobem el lloc geomètric en la resolució del qual tant Fermat com Saragossà introduïren la fórmula (2). Anomenaré lloc II-5 aquest enunciat d'Apol·loni, que en la versió llatina de Commandino diu:

> Si a quotcumque datis punctis ad punctum unum inflectantur rectae lineae et sint species, quae ab omnibus fiunt dato spacio aequales punctum continget positione datam circumferentiam.

La traducció explicativa al català de l'enunciat anterior, amb notacions i llenguatge d'avui dia, és com segueix:

Donats en un pla un nombre arbitrari de punts (per a exemplificar-ho considero tres punts A, B i C), es tracen segments rectilinis cap a un altre punt arbitrari (que li dic Q). Sobre el segment rectilini AQ considero un polígon que simbolitzo $p_A(AQ)$; sobre el segment rectilini BQ considero un segon polígon $p_B(BQ)$, i sobre el segment rectilini CQ considero un tercer polígon $p_C(CQ)$. Per a qualsevol altre punt arbitrari X, el polígon $p_A(AX)$ ha d'ésser semblant al $p_A(AQ)$, tenint en compte que AX i AQ són costats homòlegs en la semblança, el polígon $p_B(BX)$ semblant al $p_B(BQ)$, on BX i BQ són costats homòlegs, i el polígon $p_C(CX)$ semblant al $p_C(CQ)$, on CX i CQ són costats homòlegs.

Per a cada punt X es considera la suma d'àrees següent:

$$p_A(AX) + p_B(BX) + p_C(CX)$$

Si K representa un polígon arbitrari.

El lloc geomètric pel qual pregunta Apol·loni és el lloc dels punts X pels quals la suma d'àrees $p_A(AX) + p_B(BX) + p_C(CX)$ és igual a l'àrea del polígon K.

En el mateix enunciat, Apol·loni ja diu que aquest lloc geomètric és una circumferència, però no diu res sobre el centre i el radi d'aquesta circumferència.

Aquest centre i aquest radi és allò que Fermat i Descartes volgueren i aconseguiren trobar en fer la restitució del lloc II-5, i ambdós ho feren a partir de la fórmula (2).

En el cas de J. Saragossà, i per motius estrictes de voler seguir el cànon euclidià de la geometria, la fórmula (2) apareix escrita de la manera següent, continuant amb l'exemple dels tres punts que he considerat en descriure l'enunciat d'Apol·loni i amb la mateixa notació:

$$p_A(AX) + p_B(BX) + p_C(CX) = p_A(AM) + p_B(BM) + p_C(CM) + p_A(XM) + p_B(XM) + p_C(XM)$$

En el cas de Fermat, la fórmula (2) apareix formulada descriptivament (com era usual a l'època). Cal, però, afegir que per Fermat els coeficients α són nombres enters o fraccions (no pas nombres irracionals) i, per tant, la formulació de Saragossà resulta més general.

Bibliografia

COMMANDINO, F. (1588), *Pappi alexandrini mathematicae collectiones*, Pisauri, Apud Hieronymum Concordiam.

EULER, L. (1760), *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum*.

FERMAT, P. (1679), *Varia opera mathematica*, Tolosa.

SARAGOSSÀ, J. (1674), *Geometria magna in minimis*, Toledo.

STEINER, J. (1971), *Gesammelte werke*, Nova York, Chelsea Publishing Company Bronx.

Aquest treball ha estat finançat parcialment amb un ajut al projecte «Disciplinas, saberes y prácticas científicas en la España de los Austrias» BHA2003-08394-C02-01 i un ajut per a grups de la Generalitat Valenciana.